مبرهنة :

لتكن $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة توزيعية وتحتوي العنصرين ١ و٠ وكان لعنصر ما فيها متمم $(x \in E)$ فان هذا المتمم وحيد

الاثبات :

نفرض ان العنصر $x \in E$ متممين هما $x_1, x_2$

$$\left.\begin{array}{ll} x_1 \vee x_1 = 1 , & x \wedge x_1 = 0 \\ x \vee x_2 = 1 , & x \wedge x_2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

من هنا يستنتج ان :

$$\left.\begin{array}{l} x \vee x_1 = x \vee x_2 \\ x \wedge x_1 = x \wedge x_2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

بما ان $E$ شبكة توزيعية $\Leftarrow$ $\boxed{x_1 = x_2}$

مبرهنة :

إذا كانت $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة توزيعية تحتوي العنصرين ١ و٠ وكان العنصرين $x, y$ متممين هما $x'$ و $y'$ على الترتيب عندئذ يتحقق قانونا دي مورغان .

$\boxed{1}$ $(x \wedge y)' = x' \vee y'$

$\boxed{2}$ $(x \vee y)' = x' \wedge y'$

الاثبات :

$$(x' \vee y') \vee (x \wedge y) \underset{1}{=} [(x' \vee y') \vee x] \wedge [(x' \vee y') \vee y]$$

بما ان الشبكة توزيعية .

$$= (1 \vee y') \wedge (1 \vee x') = 1 \wedge 1 = 1$$

$$(x \wedge y) \wedge (x' \vee y') \underset{1}{=} [(x \wedge y) \wedge x'] \vee [(x \wedge y) \wedge y']$$

بما ان الشبكة توزيعية

$$= (0 \wedge y) \vee (0 \wedge x) = 0 \vee 0 = 0$$

ومنه نستنتج أنه

$(x \wedge y)' = x' \vee y'$

الاتحاد تجميعي وتبديلي

والقانون الثاني يبرهن بنفس الطريقة تماماً.

مبرهنة هامة:

إذا كانت $(E, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة توزيعية تحتوي العنصرين

1 و 0 فإن مجموعة جميع العناصر التي لها متممات في $E$ تشكل شبكة جزئية متممة من $E$.

الإثبات:

لتكن $M$ مجموعة جزئية من الشبكة $E$ تحتوي جميع العناصر من $E$ التي لها متممات أي بمعنى آخر:

$$x \in M \iff x' \in M$$

إن $M$ تحتوي على العنصرين 1، 0 أي $(\{0,1\} \in M)$

وإذا كان $x, y \in M$ عناصر اختيارية وحسب نظرية سابقة

$$\Rightarrow (x \wedge y)' = x' \vee y' \Rightarrow x \wedge y \in M \quad \& \quad x \vee y \in M$$

ومنه نجد أن $(M, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة جزئية من $E$.

مثال:

لنأخذ الشبكة الممثلة بمخطط هاسي التالي:

1, s, t, b, a, c, 0

لتكن $M$ مجموعة جميع العناصر التي لها متممات أي:

$$M = \{0, 1, b, s, t, c\}$$

هل هذه المجموعة تشكل شبكة جزئية؟

لا تشكل شبكة جزئية

$$s \wedge t = a \notin M$$

لأن هذه الشبكة ليست توزيعية.

$$t \wedge (b \vee c) = t$$
$$(t \wedge b) \vee (t \wedge c) = c$$
$$\Rightarrow t \neq c$$

أو

$$b \vee c = b \vee t$$
$$b \wedge c = b \wedge t$$
$$\Rightarrow c \neq t$$

⇐ شبكة ليست توزيعية.

الشبكة البوليانية (أو شبكة بول):

تعريف:

كل شبكة توزيعية ومتممة تسمى شبكة بول.

أمثلة:

$(\mathcal{P}(E), \subseteq, \vee, \wedge)$ شبكة بول.

$(D(30), \leq, \vee, \wedge)$
$(D(6), \leq, \vee, \wedge)$
$(D(42), \leq, \vee, \wedge)$
شبكة بول لأنها شبكة توزيعية ومتممة

$D(24)$ و $D(12)$ شبكات توزيعية ولكنها ليست متممة

أما $D(12)$ و $D(24)$ ليست شبكة بول لأنها ليست شبكة متممة.

نتيجة من تعريف:

يجب أن نلاحظ انه في كل شبكة بوليانية يجب أن تتوافر الشروط التالية.

[1] في كل شبكة بوليانية يوجد العنصرين (0, 1)

عنصر الأكبر ← 1 ، عنصر اصغر ← 0

[2] لكل عنصر $x \in E$ يوجد متمم وحيد $x' \in E$ وإذا كان $y$ هو عنصر اختياري من الشبكة $E$ بحيث يكون $x \wedge y = 0$ فإن $y \leq x'$

وذلك لأن:

$$y = y \wedge 1 = y \wedge (x \vee x') = (y \wedge x) \vee (y \wedge x') = y \wedge x'$$

$(y \wedge x) = 0$

$\Rightarrow y \leq x'$

[3] إن متمم العنصر (1) هو (0) ومتمم العنصر (0) هو (1) وكذلك متمم المتمم
يساوي العنصر نفسه أي أن:

$1' = 0 \quad , \quad 0' = 1$

$(x')' = x \quad \forall \, x \in E$

[4] في الشبكات البوليانية بشكل دائم يتحقق قانونا ديمورغان.

$$(x \vee y)' = x' \wedge y'$$
$$(x \wedge y)' = x' \vee y'$$
$$\forall \, x, y \in E$$

* الشبكات البوليانية ذات أهمية كبيرة لصلتها الوثيقة بحلقات بول وكذلك
بجبر بول (والذي سوف ندرس بالتفصيل في الفصل القادم).

مورفيزم والإيزومورفيزم الشبكات.

إذا كانت $f : (M, \leq, \vee, \wedge) \longrightarrow (N, \leq, \vee, \wedge)$ دالة
عندئذ:

[1] نقول عن $f$ أنه هو مورفيزم شبكي ترتيبي إذا تحقق الشرطية.

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$
$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$
$$\forall \, x, y \in M$$

بالإضافة إلى ذلك، إذا كانت الدالة $f$ تقابل عندئذ نسمي $f$ إيزومورفيزم
شبكي ترتيبي.

[2] كما نسمي $f$ مورفيزم شبكي عاكس لترتيب إذا تحقق الشرطية..

$$f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$$
$$f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$$

وإذا كانت $f$ دالة تقابل (متباينة وغامرة) فإن $f$ يسمى إيزومورفيزم شبكي عاكس للترتيب

ملاحظة:
- إذا كان مورفيزم من الشبكة $M$ وغامر يسمى ابيمورفيزم.
- إذا كان $f$ مورفيزم ومتباين نسميه مونومورفيزم
- إذا كان $f: M \to M$ حيث $M$ شبكة فإننا نسمي $f$ أيتومورفيزم

مبرهنة:

إذا كان $f$ مورفيزم شبكي ترتيبي فهو مورفيزم ترتيبي.

الإثبات: (1)

لنفرض $f: M \to N$ مورفيزم شبكي ترتيبي ولنبرهن انه ترتيبي

$$x \leq y \Rightarrow y = x \vee y \Rightarrow f(y) = f(x) \vee f(y)$$
$$\Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

(2) إذا كان $f$ مورفيزم شبكي عاكس للترتيب فهو مورفيزم عاكس للترتيب

الاثبات:
$$x \leq y \Rightarrow y = x \vee y \Rightarrow f(y) = f(x) \wedge f(y)$$
$$\Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

ومنه فإن $f$ مورفيزم عاكس للترتيب.

مبرهنة:

إذا كان $f$ تابع متباين وغامر من الشبكة $(M, \leq, \vee, \wedge)$ إلى الشبكة $(N, \leq, \vee, \wedge)$ فإن:

(1) $f$ إيزومورفيزم شبكي ترتيبي $\Longleftrightarrow$ $f$ إيزومورفيزم ترتيبي.

(2) $f$ إيزومورفيزم شبكي عاكس للترتيب $\Longleftrightarrow$ $f$ إيزومورفيزم عاكس للترتيب

الاثبات:

(1) $\Leftarrow$ لزوم الشرط:

برهان ~~مستقلا~~ حتى نبرهن على لزوم الشرط يكفي ان نثبت ان $f^{-1}$ هو مورفيزم ترتيبي للمجموعة $(N, \leq)$ في المجموعة $(M, \leq)$

ليكن $n_1, n_2$ عناصر من المجموعة $(N, \leq)$ حيث $n_1 \leq n_2$ ولنضع $m_1 = f^{-1}(n_1)$ ، $m_2 = f^{-1}(n_2)$ فنجد أن

$$f(m_1 \vee m_2) = f(m_1) \vee f(m_2) = n_1 \vee n_2 = n_2$$

ومنه:

وبالتالي فإن: $m_1 \vee m_2 = f^{-1}(n_2) = m_2$

إذا $m_1 \leq m_2$ $\quad f^{-1}(n_1) \leq f^{-1}(n_2)$

وهذا يعني أن $f^{-1}$ هو مورفيزم ترتيبي.

⇐ كفاية شرط.

لنفرض أن $f$ ايزومورفيزم ترتيبي المجموعة $(M, \leq)$ في المجموعة $(N, \leq)$

ولنثبت أن

$$f(x \vee y) \overset{?}{=} f(x) \vee f(y)$$

بما أن

حسب تعريف sup في $x \leq x \vee y$ & $y \leq x \vee y$

ومنه حسب الفرض يكون:

$$\Rightarrow f(x) \leq f(x \vee y) \quad \& \quad f(y) \leq f(x \vee y)$$

حد أعلى للعنصرين $x$ و $y$

وبالتالي:

$$\Rightarrow f(x) \vee f(y) \leq f(x \vee y) \ldots\ldots (1)$$

وبما أن:

$$f(x) \leq f(x) \vee f(y) \quad , \quad f(y) \leq f(x) \vee f(y)$$

فيكون:

بما أن $f$ ايزومورفيزم ترتيبي $\quad x \leq f^{-1}[f(x) \vee f(y)]$

$$y \leq f^{-1}[f(x) \vee f(y)]$$

حد أعلى للعنصرين $x, y$

$$\Rightarrow x \vee y \leq f^{-1}[f(x) \vee f(y)]$$

ومنه وبأخذ الصورة المباشرة فيكون:

$$f(x \vee y) \leq f(x) \vee f(y) \ldots (2)$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$$

وبنفس الطريقة نثبت ان

$$f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$$

تمرين:

ليكن $[a,b]$ مجالاً مغلقاً في شبكة توزيعية $(E, \leq, \vee, \wedge)$ عندئذ اثبت ان

$$f : E \longrightarrow [a,b]$$

والمعرفة بالشكل $f(x) = (x \vee a) \wedge b$

هو هومومورفيزم شبكي غامر وهل هو متباين.

ملاحظة هامة:

اذا كان $f$ هو ايزومورفيزم شبكي ترتيبي من الشبكة $M$ في الشبكة $N$ وكانت $M$ تحتوي العنصرين $0$ و $1$ فإن $f(1)$ ، $f(0)$ هما صفر الشبكة وواحدها في $N$ كما ان

$$(f(x))' = f(x')$$

حيث $x'$ متمم العنصر $x$

البرهان:

ليكن $y$ عنصر اختياري من الشبكة $(N, \leq, \vee, \wedge)$ عندئذ حسب الفرض يوجد عنصر وحيد $x \in M$ بحيث ان

$$f(x) = y$$

وبما ان $x \in M$ و $M$ تحتوي العنصرين $0$ و $1$ فإن $0 \leq x \leq 1$

وبما ان $f$ هو ايزومورفيزم شبكي ترتيبي فإن

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1) \text{ ومنه}$$

$$f(0) \leq y \leq f(1)$$

هذا يعني ان $f(0)$ هو صفر الشبكة $N$ و $f(1)$ هو واحد الشبكة $N$

بقي ان نثبت ان

$$(f(x))' = f(x')$$

لنفرض ان $x'$ هو متمم لـ $x$ عندها حسب تعريف المتمم.

$$x \wedge x' = 0 \Rightarrow f(x) \wedge f(x') = 0$$
$$x \vee x' = 1 \Rightarrow f(x) \vee f(x') = 1$$
$$\Rightarrow$$

$$(f(x))' = f(x')$$

نتيجة:

إن الشبكات المنتهية التي تكون مخططات هاس لها متشابهة هي إيزومورفية مع بعضها البعض

مثال:

$$D(30) \cong D(42) \cong P(E)$$

حيث $E = \{a, b, c\}$

~~مثال: إذا كانت [illegible] شبكة بوليانية [illegible] الشبكة [illegible] مورفيزم للشبكة الترتيبي.~~

مثال:

إذا كانت $(S, \leq, \vee, \wedge)$ شبكة بوليانية عندها مهما يكن $(a \in S)$ فإن الدالة

$\theta: S \to [0,a] \times [a,1]$ المعرفة بالشكل:

$$\theta(x) = (x \wedge a, x \vee a)$$

هي إيزومورفيزم شبكي ترتيبي.

انتهت المحاضرة